```
(%i1)  kill(all);
(%o0)  done

(%i1)  depends([p1,q1,p2,q2,r1],t);
(%o1)  [p1(t), q1(t), p2(t), q2(t), r1(t)]
```

1 Hamilton equations

```
(%i3)  H1(H,q,p) := diff(q,t) = diff(H, p);
       H2(H,q,p) := diff(p,t) = -diff(H, q);
```

$$\text{(\%o2)}\quad \mathrm{H1}(H,q,p):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}\,H$$

$$\text{(\%o3)}\quad \mathrm{H2}(H,q,p):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,q}\,H$$

2 Eval Hamilton equations (inertial system)

```
(%i4)  gamma: (m(q1)-p1^2/(m^2*c^2))^(-1/2);
```

$$\text{(gamma)}\quad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}(q1)-\frac{p1^2}{c^2\,m^2}}}$$

```
(%i5)  H: m(q1)*gamma*m*c^2-m*M*G/q1;
```

$$\text{(H)}\quad \frac{c^2\,m\,\mathrm{m}(q1)}{\sqrt{\mathrm{m}(q1)-\frac{p1^2}{c^2\,m^2}}}-\frac{G\,M\,m}{q1}$$

```
(%i9)  E11: H1(H,q1,p1);
       E21: H1(H,q2,p2);
       E31: H2(H,q1,p1);
       E41: H2(H,q2,p2);
```

$$\text{(E11)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,q1=\frac{p1\,\mathrm{m}(q1)}{m\left(\mathrm{m}(q1)-\frac{p1^2}{c^2\,m^2}\right)^{3/2}}$$

$$\text{(E21)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,q2=0$$

$$\text{(E31)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p1=-\frac{c^2\,m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,q1}\,\mathrm{m}(q1)\right)}{\sqrt{\mathrm{m}(q1)-\frac{p1^2}{c^2\,m^2}}}+\frac{c^2\,m\,\mathrm{m}(q1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,q1}\,\mathrm{m}(q1)\right)}{2\left(\mathrm{m}(q1)-\frac{p1^2}{c^2\,m^2}\right)^{3/2}}-\frac{G\,M\,m}{q1^2}$$

$$\text{(E41)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p2=0$$

2.1 Re-insert gamma

```
(%i13)  E11a: ratsubst(%gamma, gamma, E11);
        E21a: ratsubst(%gamma, gamma, E21);
        E31a: expand(ratsubst(%gamma, gamma, E31));
        E41a: ratsubst(%gamma, gamma, E41);
```

$$\text{(E11a)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,q1=\frac{\gamma^3\,p1\,\mathrm{m}(q1)}{m}$$

$$\text{(E21a)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,q2=0$$

$$\text{(E31a)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p1=\frac{\gamma^3\,c^2\,m\,\mathrm{m}(q1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,q1}\,\mathrm{m}(q1)\right)}{2}-\gamma\,c^2\,m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,q1}\,\mathrm{m}(q1)\right)-\frac{G\,M\,m}{q1^2}$$

$$\text{(E41a)}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,p2=0$$

3 Eval Hamilton equations (polar coordinate system)

```
(%i14)  gamma: (m(q1)-(p1^2+p2^2/q1^2)/(m^2*c^2))^(-1/2);
```

$$\text{(gamma)}\quad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m}(q1)-\frac{\frac{p2^2}{q1^2}+p1^2}{c^2\,m^2}}}$$

(%i15)
```
H: m(q1)*gamma*m*c^2-m*M*G/q1;
```

(H)
$$\frac{c^2\, m\, \mathrm{m}(q1)}{\sqrt{\mathrm{m}(q1)-\frac{\frac{p2^2}{q1^2}+p1^2}{c^2\, m^2}}}-\frac{G\, M\, m}{q1}$$

(%i19)
```
E11: H1(H,q1,p1);
E21: H1(H,q2,p2);
E31: H2(H,q1,p1);
E41: H2(H,q2,p2);
```

(E11)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, q1=\frac{p1\, \mathrm{m}(q1)}{m\left(\mathrm{m}(q1)-\frac{\frac{p2^2}{q1^2}+p1^2}{c^2\, m^2}\right)^{3/2}}$$

(E21)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, q2=\frac{p2\, \mathrm{m}(q1)}{m\, q1^2\left(\mathrm{m}(q1)-\frac{\frac{p2^2}{q1^2}+p1^2}{c^2\, m^2}\right)^{3/2}}$$

(E31)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, p1=\frac{c^2\, m\, \mathrm{m}(q1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, q1}\, \mathrm{m}(q1)+\frac{2\, p2^2}{c^2\, m^2\, q1^3}\right)}{2\left(\mathrm{m}(q1)-\frac{\frac{p2^2}{q1^2}+p1^2}{c^2\, m^2}\right)^{3/2}}-\frac{c^2\, m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, q1}\, \mathrm{m}(q1)\right)}{\sqrt{\mathrm{m}(q1)-\frac{\frac{p2^2}{q1^2}+p1^2}{c^2\, m^2}}}-\frac{G\, M\, m}{q1^2}$$

(E41)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, p2=0$$

3.1 Rei-nsert gamma

(%i23)
```
E11a: ratsubst(%gamma, gamma, E11);
E21a: ratsubst(%gamma, gamma, E21);
E31a: expand(ratsubst(%gamma, gamma, E31));
E41a: ratsubst(%gamma, gamma, E41);
```

(E11a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, q1=\frac{\gamma^3\, p1\, \mathrm{m}(q1)}{m}$$

(E21a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, q2=\frac{\gamma^3\, p2\, \mathrm{m}(q1)}{m\, q1^2}$$

(E31a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, p1=\frac{\gamma^3\, c^2\, m\, \mathrm{m}(q1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, q1}\, \mathrm{m}(q1)\right)}{2}-\gamma\, c^2\, m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, q1}\, \mathrm{m}(q1)\right)+\frac{\gamma^3\, p2^2\, \mathrm{m}(q1)}{m\, q1^3}-\frac{G\, M\, m}{q1^2}$$

(E41a)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, p2=0$$