DEMOSTRACIÓN DEFINITIVA 2: ORIGEN FUNDAMENTAL DE LA TORSIÓN Y LA CURVATURA

En relatividad general, los tensores de torsión y de curvatura se definen a través de la acción del conmutador de derivadas covariantes sobre cualquier tensor. Esta demostración considera la acción del conmutador sobre el vector en cualquier número de dimensiones y en cualquier espaciotiempo. La demostración se cumple para cualquier suposición, incluso aquellas fundamentales tales como compatibilidad de métrica o postulado de la tétrada. En relatividad general, la torsión del espaciotiempo se encuentra siempre presente, y no se le puede ignorar. Esto significa que la conexión es siempre antisimétrica, y no simétrica como lo propone y contempla el modelo generalmente aceptado de la física.

Demostración:

Consideremos en conmutador de derivadas covariantes, y permitamos que opere sobre el vector V^{ρ} de cualquier número de dimensiones y en cualquier espaciotiempo. Así:

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] \ V^{\rho} = D_{\mu} (D_{\nu} V^{\rho}) - D_{\nu} (D_{\mu} V^{\rho}) \tag{1}$$

Del lado derecho del signo de igualdad, las derivadas covariantes actúan sobre otras derivadas covariantes contenidas dentro de los corchetes. Estos se definen como

$$D_{\nu} V^{\rho} = \partial_{\nu} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} V^{\lambda} \tag{2}$$

$$D_{\lambda} V^{\rho} = \partial_{\lambda} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma} V^{\sigma} \tag{3}$$

$$D_{\nu} V^{\sigma} = \partial_{\nu} V^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} V^{\lambda} \tag{4}$$

en geometría de Riemann y se les considera como tensores de segundo rango. En consecuencia, la derivada covariante de un tensor de segundo rango debe de utilizarse en la ecuación (1). Así:

$$[D_{\mu}, D_{\nu}] \ V^{\rho} = \partial_{\mu} (D_{\nu} V^{\rho}) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} D_{\lambda} V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} D_{\nu} V^{\sigma} - \partial_{\nu} (D_{\mu} V^{\rho})$$
$$+ \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} D_{\lambda} V^{\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} D_{\mu} V^{\sigma} \tag{5}$$

Por lo tanto, hay ecuaciones tales como:

$$\partial_\mu (D_\nu V^\rho) = \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\lambda}) V^\lambda + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \partial_\mu V^\lambda$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma \qquad (6)$$

Los índices de sumatoria (índices ficticios) se reordenan de la siguiente manera:

$$\lambda \rightarrow \sigma \qquad (7)$$

Este procedimiento da como resultado:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\ V^\rho = \ & \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma \\
& - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \\
& + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda \\
& - \partial_\nu \partial_\mu V^\rho - (\partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma}) V^\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma \\
& + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \\
& - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda \qquad (8)
\end{aligned}$$

Esta expresión se reordena para dar:

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu]\ V^\rho = \ & (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}) V^\sigma \\
& - (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) (\partial_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma) \qquad (9)
\end{aligned}$$

que se expresa como:

$$[D_\mu, D_\nu]\ V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho \qquad (10)$$

En la ecuación anterior aparece el tensor de curvatura:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\,\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\,\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \qquad (11)$$

y el tensor de torsión:

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} \;=\; \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \qquad (12)$$

Por lo tanto, tal como se buscaba demostrar:

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\;\; V^{\rho} = \; R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}\, V^{\sigma} - \; T^{\lambda}_{\mu\nu}\; D_{\lambda} V^{\rho} \qquad (13)$$