DEMOSTRACION DEFINITIVA 4 : LA IDENTIDAD DE CARTAN BIANCHI

La identidad de Cartan Bianchi fue introducida por primera vez por Cartan alrededor de 1925, y ha sido desde entonces una característica tradicional de la geometría de Cartan. Se trata de una identidad rigurosamente correcta, basada en las definiciones de los tensores de curvatura y torsión ya introducidos en la Demostración Definitiva 2. Como siempre en la geometría de Cartan, se respalda en el postulado de la tétrada sin pérdida de generalidad. Relaciona la torsión y la curvatura, y constituye la base de las ecuaciones de campo homogéneas, tanto de la dinámica como de la electrodinámica, en la teoría ECE.

<u>Demostración.</u>

Utilizando notación habitual en forma diferencial (véase Carroll, Cap. 3), la identidad es:

$$\mathrm{d}\wedge T^a + \omega^a_b \wedge T^b := R^a_b \wedge q^b \tag{1}$$

que se traduce a notación tensorial de la siguiente manera:

$$\partial_\mu T^a_{\nu\rho} + \partial_\rho T^a_{\mu\nu} + \partial_\nu T^a_{\rho\mu} + \omega^a_{\mu b}\, T^b_{\nu\rho} + \omega^a_{\rho b}\, T^b_{\nu\rho} + \omega^a_{\mu b}\, T^b_{\mu\nu} :=$$

$$(R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu})\, q^a_\lambda \tag{2}$$

donde:

$$T^a_{\nu\rho} = (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu})\, q^a_\lambda \tag{3}$$

y así sucesivamente para los demás. Utilizando el Teorema de Leibniz:

$$\partial_\mu T^a_{\nu\rho} = (\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu})\, q^a_\lambda + (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu})\, \partial_\mu q^a_\lambda \tag{4}$$

y así sucesivamente para los demás. Por lo tanto, la ecuación (2) deviene:

$$(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu})\, q^a_\lambda + (\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu})\, (\partial_\mu q^a_\lambda + \omega^a_{\mu b} q^b_\lambda) + \ldots :=$$

$$(R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu})\, q^a_\lambda \tag{5}$$

Ahora cambiamos el rótulo de los índices de sumatoria (índices ficticios) según:

$$\lambda \rightarrow \sigma \tag{6}$$

para obtener:

$$(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\ )\ q^a_\lambda + (\ \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\ )\ (\partial_\mu q^a_\sigma + \omega^a_{\mu b} q^b_\sigma\ ) + \ldots\ :=$$

$$(\ R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu}\ )\ q^a_\lambda \tag{7}$$

Utilizamos el postulado de la tétrada para obtener:

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ (\ \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\ ) + \\
&\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\ (\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\ ) + \\
&\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\ (\ \Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\ )\ := R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\nu\rho\mu}
\end{aligned} \tag{8}$$

y reordenando:

$$\begin{aligned}
&R^\lambda_{\rho\mu\nu} + R^\lambda_{\mu\nu\rho} + R^\lambda_{\nu\rho\mu}\ := \\
&\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \\
&\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\nu\mu} + \\
&\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\rho\nu}
\end{aligned} \tag{9}$$

Esto constituye una identidad exacta debido a que los tensores de curvatura del lado izquierdo del signo de igualdad vienen definidos como:

$$\begin{aligned}
R^\lambda_{\rho\mu\nu} &= \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\nu\mu} \\
R^\lambda_{\mu\nu\rho} &= \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\rho\nu} \\
R^\lambda_{\nu\rho\mu} &= \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\ \Gamma^\sigma_{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{10}$$

que era lo que se pretendía demostrar.